Devoir surveillé n° 3 - Correction

Exercice 1. Étude de matrices tridiagonales particulières (*CCINP 2024*)
Plus précisément, pour un entier naturel $n \geqslant 2$, on considère $n-1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k), pour k variant de 1 à n, tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera alors à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que n est égal à 3 et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$. On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

La matrice M_3 est bien tridiagonale avec des 1 sur la diagonale, des 0 en dehors de la sur-diagonale et de la sous-diagonale, $a_1 b_1 = -1 \times 1 = -1$ et $a_2 b_2 = -1 \times 1 = -1$.

Q2. Déterminer le rang de $M_3 - \mathrm{I}_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

- On a $M_3 - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut alors soit déterminer le rang via l'algorithme du pivot de Gauss, soit remarquer que les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et que la troisième colonne est l'opposée de la première. Dans les deux cas on trouve $\boxed{\mathrm{rg}(M_3 - \mathrm{I}_3) = 2}$.
- D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(M_3 - \mathrm{I}_3)) + \mathrm{rg}(M_3 - \mathrm{I}_3) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, d'après le calcul précédent, on a $\dim(\mathrm{Ker}(M_3 - \mathrm{I}_3)) = 1$ et en particulier il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $(M_3 - \mathrm{I}_3)X = 0$, *i.e.* $M_3 X = X$. Autrement dit $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M_3}$.

Q3. Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

$$\chi_{M_3}(X) = \det(X\mathrm{I}_3 - M_3) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & X-1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{=} (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{dvp } \mathrm{C}_1}{=} (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X-1)^2 + 2\right] = \boxed{(X-1)(X^2 - 2X + 3)}.$$

Comme le discriminant de $X^2 - 2X + 3$ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$, $\boxed{\chi_{M_3} \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}}$.

Q4. Déduire de la question précédente la valeur du déterminant M_3.

On a $\det(M_3) = \det(M_3 - 0 \times \mathrm{I}_3) = (-1)^3 \det(0 \times \mathrm{I}_3 - M_3) = -\chi_{M_3}(0) \overset{\mathbf{Q3}}{=} \boxed{3}$.

Q5. Justifier que M_3 admet 3 valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

D'après **Q3**, $\chi_{M_3} = (X-1)(X^2-2X+3)$. Ainsi $\boxed{\text{1 est valeur propre}}$ et comme $\Delta = -8$, le polynôme $X^2 - 2X + 3$ admet $\boxed{\text{deux racines distinctes complexes conjuguées}}$. Ainsi M_3 admet bien trois valeurs propres distinctes et est de taille 3 donc $\boxed{M_3 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$.
Enfin, pour toute valeur propre λ, on a l'encadrement $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$. Ici chaque valeur propre est de multiplicité 1 donc nécessairement $\boxed{\text{tous les espaces propres sont de dimension 1}}$.

On note dans la suite λ l'unique valeur propres réelle de M_3 et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ, μ et $\bar{\mu}$.

Q6. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

D'après **Q3**, $\lambda = 1$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_3) \iff M_3 X = X \iff \begin{cases} x + y = x \\ -x + y + z = y \\ -y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}.$$

Ainsi un élément de $E_1(M_3)$ est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{E_1(M_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$. Ce vecteur étant non nul, $\boxed{\text{il forme une base de } E_1(M_3)}$.

Q7. Déterminer les nombres complexes p tels que : $M_3 \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$.
En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p + \mathrm{i}\sqrt{2} = p + \mathrm{i}p\sqrt{2} \\ -p + \mathrm{i}\sqrt{2} - p = i\sqrt{2} - 2 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} - p = -p - \mathrm{i}\sqrt{2} \end{cases} \iff \boxed{p = 1}.$$

On en déduit que $1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ est valeur propre de M_3 et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. Or par **Q5**, tous les espaces propres de M_3 sont de dimension 1 donc $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ forme une base de } E_\mu(M_3)}$.

Q8. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbb{C}$ et : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. Montrer que si X est vecteur propre de N associé à la valeur propre z, alors le vecteur : $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\bar{z}$.
En déduire une base de $E_{\bar{\mu}}(M_3)$.

- Supposons que X est vecteur propre de N associé à la valeur propre z, *i.e.* $NX = zX$ avec X non nul.

En prenant le conjugué et en utilisant le fait que le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, il vient $\overline{NX} = \bar{z}\overline{X}$. Or N étant à coefficients réels, on a $\overline{N} = N$ d'où $N\overline{X} = \bar{z}\overline{X}$. Comme $\overline{X}$ est non nul (car X est non nul), $\boxed{\overline{X} \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à } \bar{z}}$.

- D'après le point précédent et **Q7**, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M_3 associé à la valeur propre $\bar{\mu}$.

Comme d'après **Q5**, $E_{\bar{\mu}}(M_3)$ est de dimension 1, on en déduit que $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ forme une base de } E_{\bar{\mu}}(M_3)}$.

Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$, où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q9. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

$\chi_{M_2}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -b_1 \\ -a_1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - a_1 b_1 = (X-1)^2 - (-1) = \boxed{X^2 - 2X + 2}$.

Q10. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

Le discriminant du trinôme du second degré obtenu à la question précédente vaut $\Delta = -4$ donc χ_{M_2} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{M_2 \text{ n'est ni diagonalisable ni trigonalisable sur } \mathbb{R}}$.

Q11. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

D'après ce qui précède, comme $\Delta < 0$, χ_{M_2} admet deux racines distinctes complexes conjuguées et M_2 est de taille 2 donc $\boxed{M_2 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$.

Q12. Donner la valeur du déterminant de M_2.

On a directement $\det(M_2) = 1 \times 1 - a_1 b_1 = 1 - (-1) = \boxed{2}$.

Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et : $\forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Q13. Montrer que pour tout entier naturel n, F_n est un entier naturel.

Procédons par récurrence double.
Propriété à démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $F_n \in \mathbb{N}$ ».
Initialisation : On a $F_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $F_1 = 1 \in \mathbb{N}$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies et montrons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Par définition, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Or par hypothèse, F_n et F_{n+1} sont deux entiers naturels donc $F_{n+2} \in \mathbb{N}$ en tant que somme de deux entiers naturels, *i.e.* $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}}$.

Q14. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n\geqslant 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n.

L'équation caractéristique associée à la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est $r^2 - r - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 5$ donc les racines sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

On sait alors qu'il existe deux réels α et β tels que $F_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, il vient

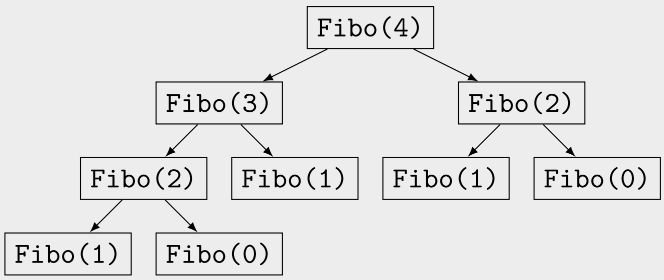
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 2\times L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (1+\sqrt{5})\alpha + (1-\sqrt{5})\beta = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$.

On considère la fonction récursive suivante, d'argument un entier naturel n, et renvoyant la valeur de F_n :

```python
def Fibo(n):
    if n <= 1:
        return 1
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
```

Q15. a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction `Fibo(4)`.



b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.

Comme on le voit dans l'arbre d'appel ci-dessus, on recalcule de nombreuses fois la même chose (par exemple ici F_2 est calculé deux fois) ce qui va entraîner une complexité élevée.

Remarque : Si on note $C(n)$ le nombre d'opérations nécessaires pour calculer F_n avec la fonction `Fibo`, on voit que $C(n) = C(n-1) + C(n-2)$. Autrement dit, $C(n) = F_n$ et on a une complexité exponentielle d'après le résultat de **Q14**.

c) Écrire une fonction `FiboV2`, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n. Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que `Fibo`.

Il suffit d'itérer en calculant les termes de proche en proche.

```python
def FiboV2(n):
    a = 1
    b = 1
    for i in range(n):
        a, b = b, a+b
    return a
```

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n.

Q16. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3.

$d_1 = \det(M_1) = \boxed{1}$ et $d_2 = \det(M_2) \overset{\textbf{Q12}}{=} \boxed{2}$. Enfin,

$$d_3 = \det(M_3) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dvp } L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & b_2 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_2b_2 - b_1a_1 = 1 - (-1) - (-1) = \boxed{3}.$$

Q17. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2}.

On suit l'indication en développant selon la dernière ligne :

$$d_{n+2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$\overset{\text{dvp } L_{n+2}}{=} -a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix}_{n+1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}_{n+1}}_{=d_{n+1}}$$

$$\overset{\text{dvp } C_{n+1}}{=} -a_{n+1}b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix}_{n} + d_{n+1}$$

$$= -(-1)d_n + d_{n+1} = \boxed{d_n + d_{n+1}}.$$

Q18. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_n = F_n$.

D'après la question précédente, les suites $(d_n)_{n\geqslant 0}$ et $(F_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient la même relation de récurrence. De plus, d'après **Q16**, $d_1 = 1 = F_1$ et $d_2 = 2 = F_2$ donc elles vérifient les mêmes conditions initiales. Par conséquent, ces deux suites coïncident, *i.e.* $\boxed{d_n = F_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. Étude d'une suite d'intégrales (*d'après CCINP 2020*)

Partie A - Convergence d'intégrales

Q19. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t^n \,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $\boxed{t^n \,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}$.

Q20. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

D'après la question précédente, $t^n \,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de référence convergente en $+\infty$ (car $\alpha = 2 > 1$). Ainsi, par comparaison entre fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

Q21. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale de la question **Q20** dont **on a montré la convergence**, on pose $t = -s$ qui est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ (de $]-\infty\,;0]$ dans $[0\,;+\infty[$). On a ainsi

$$\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{-\infty} (-s)^n \,\mathrm{e}^{-(-s)^2}(-\,\mathrm{d}s) = (-1)^n \int_{-\infty}^{0} s^n \,\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

et en particulier cette dernière intégrale est donc convergente.

Q22. Déduire des résultats précédents que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$. On doit donc étudier les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Or on a démontré aux questions **Q20** et **Q21** qu'elles convergeaient toutes les deux d'où $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2} \text{ est convergente}}$.

Partie B - Calcul et résultats asymptotiques

Pour la suite, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on admet que $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Q23. En utilisant la question **Q21**, justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles,

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{0} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, en posant $n = 2p+1$ dans le résultat de la question **Q21**, puisque $(-1)^{2p+1} = -1$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\boxed{I_{2p+1} = 0}$.

Remarque : plus généralement, si une fonction f est impaire, sous réserve de convergence, on a $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout a réel ou infini.

Q24. Établir à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{2(k+1)} = \dfrac{2k+1}{2} I_{2k}$.

Indication : on écrira $t^{2k+2}\,\mathrm{e}^{-t^2} = t^{2k+1} \times t\,\mathrm{e}^{-t^2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On prend X et Y deux réels tels que $X < Y$. On pose $u = t^{2k+1}$ et $v' = t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi $u' = (2k+1)t^{2k}$ et $v = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[X\,;Y]$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_X^Y t^{2k+2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{2} t^{2k+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_X^Y + \frac{2k+1}{2}\int_X^Y t^{2k}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{2} Y^{2k+1}\,\mathrm{e}^{-Y^2} + \frac{1}{2} X^{2k+1}\,\mathrm{e}^{-X^2} + \frac{2k+1}{2}\int_X^Y t^{2k}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme par croissances comparées $\lim\limits_{Y\to+\infty} Y^{2k+1}\,\mathrm{e}^{-Y^2} = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X^{2k+1}\,\mathrm{e}^{-X^2} = 0$, en passant à la limite dans l'égalité précédente lorsque $X \to -\infty$ et $Y \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k+2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0 + 0 + \frac{2k+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\boxed{I_{2k+2} = I_{2(k+1)} = \dfrac{2k+1}{2} I_{2k}}$.

Q25. Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Proposition à démontrer : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$: « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ ».

Initialisation : D'une part $I_0 = \sqrt{\pi}$ (cf énoncé) et d'autre part $\dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}\sqrt{\pi} = \dfrac{1}{1\times 1} = \sqrt{\pi}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. On a

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} &\overset{\text{Q24}}{=} \frac{2p+1}{2} I_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} && \mathcal{P}(p) \\ &= \frac{2p+2}{2(p+1)} \times \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} && \times\frac{2p+2}{2p+2} \text{ pour faire apparaître le } (2p+2)! \text{ désiré au numérateur.} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}$.

Q26. On **admet** que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

En utilisant ce résultat, en déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p} = +\infty$.

D'après la formule de Stirling pour $n = 2p$, on a $(2p)! \underset{+\infty}{\sim} (2p)^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{2\pi \times 2p}$. Ainsi, d'après la question précédente

$$I_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2p} p^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{2\pi}\sqrt{2p}}{2^{2p} p^{p}\,\mathrm{e}^{-p}\sqrt{2\pi p}}\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} p^{2p-p}\,\mathrm{e}^{-2p+p}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} p^{p}\,\mathrm{e}^{-p}\sqrt{2\pi}.$$

Or par croissances comparées $\lim\limits_{p\to+\infty} p^p\,\mathrm{e}^{-p} = +\infty$, d'où finalement $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p} = +\infty}$.

Partie C - Une équation différentielle

Q27. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
Comme la fonction n'est pas de signe constant, on fait une étude de convergence absolue.
Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $\left|\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
Or d'après **Q20** (cas $n = 0$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

On peut ainsi définir sur $\mathbb{R}$ une fonction $S : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admet que la fonction S est dérivable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{x}{2}y = \frac{1}{2}.$$

Q28. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).

L'équation homogène (H) associée est $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.
Comme $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x}{2}$, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

Q29. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_P : x \mapsto z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ avec z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (méthode de la variation de la constante).
La fonction y_P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_P'(x) = z'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$. En injectant dans (E), on a y_P solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_P'(x) + \frac{x}{2}y_P(x) = \frac{1}{2} \iff z'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \iff z'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}.$$

Ainsi on peut choisir $z(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ (c'est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}$ qui s'annule en 0). (*Attention, on ne sait pas calculer explicitement cette intégrale.*)

- On a ainsi obtenu que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Comme d'après l'énoncé, S est solution de (E), il existe un réel λ tel que S est de la forme précédente, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \lambda \operatorname{e}^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2} \operatorname{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \operatorname{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$.

En évaluant en $x = 0$, on a d'une part $S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0) \operatorname{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0 \, \mathrm{d}t = 0$ et d'autre part $\lambda \operatorname{e}^0 + \frac{1}{2} \operatorname{e}^0 \int_0^0 \operatorname{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t = \lambda + 0$, d'où $\lambda = 0$. (Cela revient à dire que S est l'unique solution du problème de Cauchy constitué de (E) et de la condition initiale $y(0) = 0$).

- Finalement, on a obtenu $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{1}{2} \operatorname{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \operatorname{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t}$.

Remarque : si vous voulez savoir comment on obtient l'équation différentielle vérifiée par S, allez voir la dernière partie du CCINP 2020.

Exercice 3. Une équation différentielle (*d'après CCINP 2018*)
Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2-x)y''+(16x-8)y'-\mu y=0 \qquad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose que $\mu=0$, on cherche donc à résoudre sur $]0\,;1[$, l'équation

$$16(x^2-x)y''+(16x-8)y'=0. \qquad (E_0)$$

Q30. Soit $f\colon x\mapsto \arcsin(2x-1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$ et que $\forall x\in\,]0\,;1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

- La fonction arcsin est définie et continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$ donc f est définie et continue là où $2x-1\in\,]-1\,;1[$, *i.e.* $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1 \iff 0\leqslant x\leqslant 1$. Ainsi $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [0\,;1]}$.
- De manière analogue, arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0\,;1[}$.
- Enfin, comme la dérivée de $\arcsin(u)$ est $\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, on a

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\frac{2}{4x-4x^2}=\frac{2}{\sqrt{4x(1-x)}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}.$$

Q31. Montrer que toute fonction constante sur $]0\,;1[$ est solution de (E_0).

Soit g une fonction constante sur $]0\,;1[$. Cette fonction est deux fois dérivable sur $]0\,;1[$ et on a, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $g'(x)=g''(x)=0$. En injectant dans (E), on obtient $16(x^2-x)g''(x)+(16x-8)g'(x)=0$, *i.e.* g est solution de (E). Ainsi $\boxed{\text{toute fonction constante sur }]0\,;1[\text{ est solution de } (E)}$.

Q32. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0,1\}$, $\dfrac{16x-8}{16(x^2-x)}=\dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}$.

Soit $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0,1\}$. En partant du membre de droite, on a

$$\frac{1/2}{x}+\frac{1/2}{x-1}=\frac{x-1+x}{2x(x-1)}=\frac{2x-1}{2(x^2-x)}\times\frac{8}{8}=\frac{16x-8}{16(x^2-x)}.$$

Q33. On pose $z=y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à $z'+\left(\dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}\right)z=0. \qquad (F)$

Comme y est deux fois dérivable, z est dérivable sur $]0\,;1[$ et on a $(E)\iff 16(x^2-x)z'+(16x-8)z=0$.
Or pour $x\in\,]0\,;1[$, $16(x^2-x)\neq 0$ donc l'équation précédente est équivalente à $z'+\dfrac{16x-8}{16(x^2-x)}z=0$.

Grâce à la question précédente, on obtient finalement $\boxed{(E)\overset{z=y'}{\iff} z'+\left(\dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}\right)z=0 \quad (F)}$.

Q34. Résoudre (F) sur $]0\,;1[$.

Une primitive de $x\mapsto\dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}$ est $x\mapsto\dfrac12\ln|x|+\dfrac12\ln|x-1|=\dfrac12\ln\big(x(1-x)\big)$. Ainsi les solutions de (F) sur $]0\,;1[$ sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto\lambda\exp\left(-\frac12\ln\big(x(1-x)\big)\right)=\lambda\big(x(1-x)\big)^{-1/2}=\boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}}.$$

Q35. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0\,;1[$.

D'après **Q33**, les solutions y de (E) sur $]0\,;1[$ sont les fonctions telles que y' est solution de (F) sur $]0\,;1[$. Ainsi d'après la question précédente, on a $y'(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin, on primitive grâce à **Q30** et on obtient $\boxed{y(x) = \lambda \arcsin(2x-1) + \mu \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$. Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif : $\forall x \in]-R\,;R[$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q36. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez puis exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide d'une série.

En tant que somme d'une série entière, $\boxed{y \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$ sur l'intervalle ouvert de convergence, *i.e.* $\boxed{\text{sur }]-R\,;R[}$. De plus, par dérivations terme à terme on a

$$\boxed{\forall x \in]-R\,;R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{puis} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}.$$

Q37. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}]x^n = 0$.

La fonction y vérifie (E_μ) si et seulement si pour tout $x \in]-R\,;R[$, on a

$$\begin{aligned}
& 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - \mu y(x) = 0 \\
\overset{\text{Q36}}{\iff} \; & 16(x^2 - x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (16x - 8)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff \; & 16\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0
\end{aligned}$$

La première somme peut aussi commencer à $n = 0$ (car les deux premiers termes sont alors nuls), la seconde à $n = 1$ et on y fait le changement d'indice $j = n - 1$, la troisième à $n = 0$, dans la quatrième on pose $k = n - 1$ et enfin on ne touche pas à la cinquième.

$$\begin{aligned}
\iff \; & 16\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)j a_{j+1} x^j + 16\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1} x^k - \mu\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff \; & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big([16n(n-1) + 16n - \mu]a_n - [16n(n+1) + 8(n+1)]a_{n+1} \Big) x^n = 0 \\
\iff \; & \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}]x^n = 0}.
\end{aligned}$$

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q38. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \dfrac{16n^2 - \mu}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$.

Par unicité du développement en série entière, on déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} = 0$, ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; a_{n+1} = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n = \frac{16n^2 - \mu}{4(2n+2)(2n+1)} a_n}.$$

Q39. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)$.

Propriété à démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)$ ».

Initialisation : D'une part $a_1 \overset{\text{Q38}}{=} \dfrac{16\times 0^2-\mu}{4(2\times 0+2)(2\times 0+1)}a_0 = -\dfrac{\mu a_0}{8}$

et d'autre part $\dfrac{a_0}{4^1(2\times 1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{1-1}(16k^2-\mu) = \dfrac{a_0}{4\times 2}\times(-\mu) = -\dfrac{\mu a_0}{8}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{\text{Q38}}{=} \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}a_n \\ &\overset{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}\times\frac{a_0}{4^n(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu) \\ &= \frac{a_0}{4^{n+1}(2n+2)!}\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu) \qquad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}\end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{a_0}{4^n(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}.$$

Q40. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son domaine de validité.

Si $a_0 = 0$, on a, d'après la question précédente, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{y \text{ est la fonction nulle}}$ et cette expression est $\boxed{\text{valable sur } \mathbb{R}}$.

Q41. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, calculer le rayon de convergence de y.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on pose $u_n = |a_n x^n| = |a_n||x|^n > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} \overset{\text{Q38}}{=} \frac{|16n^2-\mu|}{4(2n+2)(2n+1)}|x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{16n^2}}{\cancel{16n^2}}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente, donc $R \geqslant 1$.
Si $|x| > 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est divergente, donc $R \leqslant 1$.
Par double inégalité, on a donc $\boxed{R = 1}$.

Q42. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Si $\mu = 16p^2$ avec p un entier alors, pour tout $n \geqslant p+1$, on a $a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16n^2-16p^2) = 0$ car le produit contient le facteur $16p^2-16p^2 = 0$. De plus, $a_p = \dfrac{a_0}{4^p(2p)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(16n^2-16p^2) \neq 0$ donc $\boxed{y \text{ est une fonction polynomiale de degré } p}$.